



สำนักพิมพ์ห้องจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แคลคูลัส ๓ CALCULUS III



ดำรงค์ ทิพย์โยธา • ยุวรีย์ พันธุ์กล้า
ณัฐฐานาถ ไตรภาพ • สุรัชชัย สมบัติบริบูรณ์



แคลคูลัส ๓ CALCULUS III

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ยุวรีย์ พันธุ์กล้า
ณัฐรณาท ไตรภพ
สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

เลขทะเบียน **M 0146176**
วันลงทะเบียน - ๙ มิย ๒๕๕๘
เลขเรียกหนังสือ ๘๓๙๓๓
2578
๓๒๖๑



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2558



คำรงค์ ทิพย์โยธา

แคลคูลัส ๓ / คำรงค์ ทิพย์โยธา, ยิวรีย์ พันธกล้า, ณีภูชญาต์ ไตรภพ, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

1. แคลคูลัส I, ยิวรีย์ พันธกล้า II. ณีภูชญาต์ ไตรภพ III. สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

515

ISBN 978 974 03 3314 2

สพจ. 1892



สรรคุดเกล้าวิชาการ *สู่สังคม*

www.ChulaPress.com

Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 3,000 เล่ม พ.ศ. 2558

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดทำหน้าย **ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา

ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พระยา จ.พระยา โทร. 0-5446 6799 800 โทรสาร 0-5446 6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

วัฒนาอินเตอร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

และเครือข่าย

ร้านค้า, หนังสือเข้าชั้นเรียน ติดต่อแผนกขายส่ง สาขาวัฒนาอินเตอร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9

โทรสาร 0-2950-5405

กองบรรณาธิการ : จีพวรรณ โหละสุต

ออกแบบปก : ชรินทร์ นามมงคล

ออกแบบรูปเล่ม : รองศาสตราจารย์คำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ที่ : บริษัทวี.พี.เอ็น (1991) จำกัด โทร. 0-2451-3010 โทรสาร 0-2451-3014

คำนำ

หนังสือ แคลคูลัส ๓ (CALCULUS III) เป็นหนังสือที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๓ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยพื้นผิวในปริภูมิสามมิติ พื้นผิวควอดริก สมการทั่วไปตกรีสองของสองตัวแปรและสามตัวแปร ระบบพิกัดเชิงขั้ว กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว การหาพื้นที่ของบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว อนุพันธ์และค่าสุดขีดของฟังก์ชันของหลายตัวแปร อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปรในส่วนของกาเปลี่ยนตัวแปรสำหรับอินทิกรัลสองชั้น อินทิกรัลของฟังก์ชันของสามตัวแปร ระบบพิกัดทรงกระบอก ระบบพิกัดทรงกระบอกอินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าแวกเตอร์ อินทิกรัลตามเส้นที่เป็นอิสระจากวิถี ทฤษฎีบทของกรีน สมการแวกเตอร์ของพื้นผิว การหาพื้นที่ของพื้นผิว อินทิกรัลตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าจริง อินทิกรัลตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าแวกเตอร์ ทฤษฎีบทของสโตกส์ และทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (ทฤษฎีบทของเกาส์)

คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๓ ประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ดำรงศ ทิพย์โยธา รองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธุ์กล้า รองศาสตราจารย์ณัฐรณาด ไตรภพ และผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ ซึ่งมีประสบการณ์การสอนวิชาแคลคูลัสให้กับนิสิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเป็นเวลานานกว่า ๒๕ ปี คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๓ ได้รวบรวมเนื้อหาเพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๓ ให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์และนิสิตคณะอื่นๆ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส ๓ กับภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ เช่น คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี (ภาควิชาสถิติ) คณะครุศาสตร์

ผู้เรียบเรียงหวังว่า หนังสือแคลคูลัส ๓ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิตนักศึกษา อาจารย์ผู้สอน ในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาแคลคูลัส

รองศาสตราจารย์ดำรงศ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธุ์กล้า

รองศาสตราจารย์ณัฐรณาด ไตรภพ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

ธันวาคม ๒๕๕๗

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 พื้นผิวในปริภูมิสามมิติ	1
1.1 ทรงกลม ทรงกระบอก และกรวย	2
1.2 พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน	16
1.3 การพิจารณาลักษณะของพื้นผิวจากสมการ	22
1.4 พื้นผิวดอตรีก	41
1.5 สมการทั่วไปดีกรีสองของสองตัวแปร	65
1.6 สมการทั่วไปดีกรีสองของสามตัวแปร	97
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 1	135
บทที่ 2 ระบบพิกัดเชิงขั้ว	149
2.1 จุดและสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว	150
2.2 การเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว	160
2.3 สมมาตรของกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว	172
2.4 การหาพื้นที่ของบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว	187
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 2	204
บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปร	209
3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันในทิศทางของเวกเตอร์และเวกเตอร์เกรเดียนต์	209
3.2 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย	224
3.3 ระนาบสัมผัสและเส้นแนวฉากของพื้นผิว	242
3.4 สูตรของเทย์เลอร์ของฟังก์ชันของสองตัวแปร	249
3.5 ค่าสุดขีดของฟังก์ชันของหลายตัวแปร	254
3.6 ตัวคูณลากรางจ์	278
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 3	284
บทที่ 4 อินทิกรัลของฟังก์ชันของหลายตัวแปร	289
4.1 การเปลี่ยนตัวแปรสำหรับอินทิกรัลสองชั้น	289
4.2 อินทิกรัลของฟังก์ชันของสามตัวแปรบนโดเมนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	311
4.3 อินทิกรัลของฟังก์ชันของสามตัวแปรบนโดเมนทั่วไป	319

4.4 การเปลี่ยนตัวแปรสำหรับอินทิกรัลสามชั้น	337
4.5 ประโยชน์ของอินทิกรัลสามชั้น	359
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 4	375
บทที่ 5 อินทิกรัลตามเส้น	385
5.1 อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง	385
5.2 อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์	408
5.3 อินทิกรัลตามเส้นเป็นอิสระจากวิถี	432
5.4 ทฤษฎีบทของกรีน	481
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 5	516
บทที่ 6 อินทิกรัลตามพื้นผิว	519
6.1 สมการเวกเตอร์ของพื้นผิว	519
6.2 การหาพื้นที่ของพื้นผิว	529
6.3 อินทิกรัลตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าจริง	552
6.4 อินทิกรัลตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์	568
6.5 รูปแบบอื่น ๆ ของอินทิกรัลตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์	580
6.6 ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ล	592
6.7 ความสัมพันธ์ระหว่างอินทิกรัลตามพื้นผิวกับอินทิกรัลตามเส้น	596
6.8 ความสัมพันธ์ระหว่างอินทิกรัลตามพื้นผิวกับอินทิกรัลสามชั้น	616
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 6	629
บรรณานุกรม	633
ดัชนี	635

บทที่ 1

พื้นผิวในปริภูมิสามมิติ

ในระดับมัธยมศึกษา นิสิตได้เรียนเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น เช่น จุด เส้นตรง ซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $ax + by + c = 0$ และกราฟของภาคตัดกรวยต่าง ๆ เช่น ความสัมพันธ์ $y = x^2$ มีกราฟเป็นพาราโบลา $x^2 + y^2 = 16$ มีกราฟเป็นวงกลม $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ มีกราฟเป็นวงรี และ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ในวิชาแคลคูลัส ๒ ได้เรียนเกี่ยวกับกราฟของเส้นตรงและระนาบ ในปริภูมิสามมิติซึ่งเราพบว่าเส้นตรงเกิดจากการตัดกันของระนาบ และระนาบเป็นเซตของจุด (x, y, z) ซึ่งสอดคล้องสมการ

$$Ax + By + Cz = D$$

โดยทั่วไปเราจะเรียกเซตของจุด (x, y, z) ซึ่งสอดคล้องสมการ $H(x, y, z) = 0$ เมื่อ H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องว่า พื้นผิว ซึ่งเราจะเห็นว่าระนาบเป็นพื้นผิวที่มีสมการในรูปแบบที่ง่ายที่สุด กล่าวคือ เป็นสมการดีกรีหนึ่ง

ในบทนี้เราจะเรียนเกี่ยวกับพื้นผิวอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งพื้นผิวที่มีสมการในรูปสมการดีกรีสอง ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ตัวอย่างเช่น

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 13 = 0$$

ในการเรียนเรื่องพื้นผิว เราจะเริ่มต้นด้วยการหาสมการของพื้นผิวที่เราสามารถพบเห็นได้ทั่วไป ได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอก และกรวย รวมทั้งพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

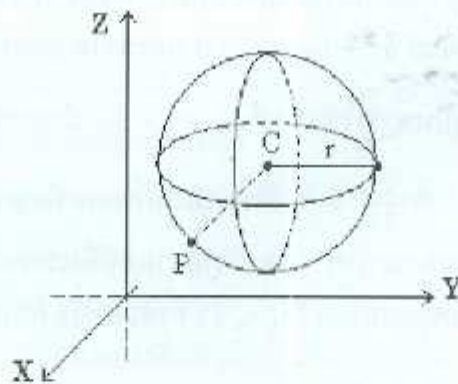
1.1 ทรงกลม ทรงกระบอก และกรวย

1.1.1 ทรงกลม

บทนิยาม 1.1.1 ทรงกลมคือเซตของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะทางคงที่ที่กำหนดให้ โดยเรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลาง ของทรงกลม และเรียกระยะทางคงที่ว่า รัศมี ของทรงกลม

การหาสมการของทรงกลม

ให้ทรงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(x_0, y_0, z_0)$ และมีรัศมีเท่ากับ r ดังรูปที่ 1.1.1



รูปที่ 1.1.1

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกลม

จุด P จะอยู่บนทรงกลม ก็ต่อเมื่อ $\| \vec{CP} \| = r$

$$\| \vec{CP} \| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

ดังนั้น $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

เพราะฉะนั้นสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (x_0, y_0, z_0) และมีรัศมีเท่ากับ r

คือ

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

หมายเหตุ

1. ทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมีเท่ากับ r

จะมีสมการของทรงกลมเป็น $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

2. โดยการกระจายพจน์ในสมการ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

จะได้สมการของทรงกลมเขียนอยู่ในรูป

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

3. สำหรับสมการ $x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$

$$\text{ถ้า } \frac{G^2}{4} + \frac{H^2}{4} + \frac{K^2}{4} - L > 0$$

$$\text{แล้ว } x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

จะเป็นสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-\frac{G}{2}, -\frac{H}{2}, -\frac{K}{2})$

$$\text{และมีรัศมีเท่ากับ } \sqrt{\frac{G^2}{4} + \frac{H^2}{4} + \frac{K^2}{4} - L}$$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 2, 3)$ และมีรัศมีเท่ากับ 5

วิธีทำ ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกลม

เพราะฉะนั้นสมการของทรงกลมคือ

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \quad \square$$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิจารณาว่าสมการ $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 16z = 12$ เป็นสมการของทรงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นสมการของทรงกลม จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 16z = 12$

โดยการจัดรูปให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 16z + 64) = 1 + 4 + 64 + 12$$

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 8)^2 = 9^2$$

เพราะฉะนั้นสมการที่กำหนดให้เป็นสมการของทรงกลมที่มี

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1, -2, -8)$ และมีรัศมีเท่ากับ 9 □