สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แคลคูลัส ๒

CALCULUS II

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ณัฏฐนาถ ไตรภพ
สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

แคลคูลัส ๒
CALCULUS II

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ณัฏฐนาถ ไตรภพ
สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2558

290.-

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

แคลคูลัส 2 / ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

1. แคลคูลัส. I. ณัฏฐนาถ ไตรภพ. II. สุรชัย สมบัติบริบูรณ์.

515

ISBN 978-974-03-3300-5

สพจ. 1894

สรรคุณค่าวิชาการ สู่สังคม

www.ChulaPress.com

Knowledge to All

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 3,000 เล่ม พ.ศ. 2558

ผู้จัดจำหน่าย **ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา **ศาลาพระเกี้ยว** โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441
สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495
ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165
ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135
ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239
โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023
ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798
จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304
รัตนาธิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405
Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 http://www.chulabook.com
และเครือข่าย

ร้านค้า, หนังสือเข้าชั้นเรียน ติดต่อแผนกขายส่ง สาขารัตนาธิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9
โทรสาร 0-2950-5405

กองบรรณาธิการ : รวีวรรณ จันทรเม้า
พิสูจน์อักษร : ทิพวรรณ ไทยสุด
ออกแบบปก : ขวัญหทัย นามบุญคุณ
ออกแบบรูปเล่ม : รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา
พิมพ์ที่ : บริษัทวี.พริ้นท์ (1991) จำกัด โทร. 0-2451-3010 โทรสาร 0-2451-3014

คำนำ

หนังสือ แคลคูลัส ๒ (CALCULUS II) เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๒ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ลำดับและอนุกรมของจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน อนุกรมกำลังของจำนวนจริง การประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้สูตรของเทย์เลอร์ การประมาณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต พิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เส้นตรงและระนาบในปริภูมิสามมิติ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และเส้นโค้ง ระบบพิกัดเชิงขั้ว ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร ค่าเชิงอนุพันธ์รวม อินทิกรัลของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้นและการประยุกต์

คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๒ ประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา รองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ และผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ ซึ่งมีประสบ-การณ์การสอนวิชาแคลคูลัสให้กับนิสิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเป็นเวลานานกว่า ๒๕ ปี คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๒ ได้รวบรวมเนื้อหาเพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๒ ให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์และนิสิตคณะอื่น ๆ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส ๒ กับภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ เช่น คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี (ภาควิชาสถิติ) คณะครุศาสตร์

ผู้เรียบเรียงหวังว่าหนังสือแคลคูลัส ๒ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิตนักศึกษา อาจารย์ผู้สอน ในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาแคลคูลัส

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา
รองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรชัย สมบัติบริบูรณ์

มกราคม 2558

สารบัญ

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรมของจำนวน

ในการศึกษาเกี่ยวกับลำดับและอนุกรมของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน การหาผลบวกของอนุกรมเราจำเป็นต้องทำการพิสูจน์ข้อความหรือสูตรในพจน์ของจำนวนนับ ดังนั้นในหัวข้อแรกของบทที่ 1 นี้ เราจะกล่าวถึงอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับว่าเป็นจริง เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาเรื่องลำดับและอนุกรมต่อไป

หมายเหตุ ในหนังสือเล่มนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

N แทน เซตของจำนวนนับทั้งหมด

R แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

C แทน เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด

1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n ว่าเป็นจริง เราใช้วิธีการต่อไปนี้

สำหรับจำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ n ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

(1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

เราเรียกวิธีการนี้ว่า **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

ตัวอย่าง 1.1.1

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

เนื่องจาก $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ

สมมติว่า P(k) เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

ดังนั้น $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n □

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิสูจน์ว่า $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

ให้ P(n) แทนข้อความ $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว

เนื่องจาก $5^1 - 2^1 = 3$ ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ

สมมติว่า P(k) เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า $5^k - 2^k$ หารด้วย 3 ลงตัว

จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $5^k - 2^k = 3m$ ... (1)

พิจารณา $5^{k+1} - 2^{k+1} = 5(5^k) - 2(2^k)$

$$= (3 + 2)(5^k) - 2(2^k)$$
$$= 3(5^k) + 2(5^k) - 2(2^k)$$
$$= 3(5^k) + 2(5^k - 2^k)$$
$$= 3(5^k) + 2(3m) \quad \text{(จาก (1))}$$
$$= 3(5^k + 2m)$$

เนื่องจาก $5^k + 2m$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $5^{k+1} - 2^{k+1}$ หารด้วย 3 ลงตัว

แสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนนับ n □

ตัวอย่าง 1.1.3

จงพิสูจน์ว่า $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

เนื่องจาก $1(1 + 1) = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใดๆ

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + k(k + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

ดังนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1)(k + 2)$$
$$= (k + 1)(k + 2)(\frac{k}{3} + 1)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

แสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุกจำนวนนับ n □

นอกจากอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะใช้พิสูจน์ข้อความ $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n แล้ว เราอาจประยุกต์ใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ข้อความ $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq m$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยมีวิธีการต่อไปนี้

สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \geq m$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ n
ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

(1) $P(m)$ เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ซึ่ง $k \geq m$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq m$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า $2^n > n^2$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 5$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \geq 5$

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^n > n^2$

เนื่องจาก $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

ดังนั้น $P(5)$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $k \geq 5$

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า $2^k > k^2$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
2(2^k) &> 2k^2 \\
2^{k+1} &> k^2 + k^2 \\
&\geq k^2 + 5k && \text{(เพราะว่า } k \geq 5 \text{ เพราะฉะนั้น } k^2 \geq 5k) \\
&= k^2 - 2k + 3k \\
&> k^2 - 2k + 1 && \text{(เพราะว่า } k \geq 5 \text{ เพราะฉะนั้น } 3k > 1) \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $2^{k+1} > (k+1)^2$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 5$

นั่นคือ $2^n > n^2$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 5$ □