



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# แคลคูลัส ๒

## CALCULUS II

ดำรงค์ ทิพย์โยธา  
ณัฐรณาท ไตรภพ  
สุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์





# แคลคูลัส ๒

## CALCULUS II

ดำรงค์ ทิพย์โยธา  
ณัฐชนาน ไตรภพ  
สุรัชชัย สมบัติบริบูรณ์

เลขทะเบียน **M 0145238**  
วันลงทะเบียน **๑๖** มี.ค. ๒๕๕๘  
เลขเรียกหนังสือ ๕๑๕  
๐.๑๙๓๐  
๒๕๕๘  
๐.๒๑๑



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
2558

290.-



## ตำราจกั ทิพิโยธา

แคลคูลัส 2 / ตำราจกั ทิพิโยธา, ฅฅฎฐชาด ไตรภพ, สุรชัย สมบัฒบิรบูรณั  
1. แคลคูลัส. I. ฅฅฎฐชาด ไตรภพ. II. สุรชัย สมบัฒบิรบูรณั.

515

ISBN 978-974-03-3300-5

สพจ. 1894



สรรฐณฅวืวิภการ สู้สัฒม  
www.ChulaPress.com  
Knowledge to All

ภิขสิวิธัีองสำนัภทิมพ์แหงจุฬาลงกรณัมหาวิทยาลัย  
พมิพคัรวิทั 1 จัภณภ 3,000 เล่ม พ.ศ. 2558

การมริคและการลอกเลียมหนังสือสรรมัีม่่ารบบบไคทังสิัน  
ทังงัได้รับอนุญาตเป็นสลายสิขัณณัีอักษรจากสำนัภทิมพ์แหงจุฬาลงกรณัมหาวิทยาลัย

**ผู้จัดจำหน่าย** ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณัมหาวิทยาลัย  
ถนนพหลุทไธ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

**สาขา** สาขาพระเก็ยว โทร. 0 2218 7000 3 โทรสาร 0-2255-4441  
สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0 2254-9495  
ม.นครศวร จ.ทึยญุโดค โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0163  
ม.เทคโปลัยสิสุรนาธิ จ.นคกรราชสิมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135  
ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3230  
โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นคกรนาชก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023  
ม.พระยา จ.พระยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0 5446-6798  
จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304  
รัตนานิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0 2950 5408 9 โทรสาร 0-2950-5405  
Call Center (จัดสงัทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>  
และเครือชัาย

ร้านค้า, หนังสือเข้าชันเรียน คิคคผลแมนกชัายสงั สาขารัตนานิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0 2950 5408 9  
โทรสาร 0-2950 5405

กองบรรณภิกการ : รวิวรณ ฉัษทรณััน

พิสุจบัภิกษร : ทิพิวรณั โทระสุค

ออกแบบปก : จวิณัทร นามนุจคณั

ออกแบบรูปเล่ม : รวงศาสตราจารยัตำราจกั ทิพิโยธา

พิมพ์ที่ : บริษัทพิ.พริ้นท์ (1991) จัภกัศ โทร. 0 2451 3010 โทรสาร 0-2451-3014

## คำนำ

หนังสือ แคลคูลัส ๒ (CALCULUS II) เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๒ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ลำดับและอนุกรมของจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน อนุกรมกำลังของจำนวนจริง การประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้สูตรของเทย์เลอร์ การประมาณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต พิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เส้นตรงและระนาบในปริภูมิสามมิติ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และเส้นโค้ง ระบบพิกัดเชิงขั้ว ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร ค่าเชิงอนุพันธ์รวม อินทิกรัลของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้นและการประยุกต์

คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๒ ประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ดำรงค ทัพโยธา รองศาสตราจารย์ณัฐฐานถ ไตรภพ และผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์ ซึ่งมีประสบการณ์การสอนวิชาแคลคูลัสให้กับนิสิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเป็นเวลานานกว่า ๒๕ ปี คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๒ ได้รวบรวมเนื้อหาเพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๒ ให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์และนิสิตคณะอื่นๆ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส ๒ กับภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ เช่น คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี (ภาควิชาสถิติ) คณะครุศาสตร์

ผู้เรียบเรียงหวังว่าหนังสือแคลคูลัส ๒ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิตนักศึกษา อาจารย์ผู้สอน ในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาแคลคูลัส

รองศาสตราจารย์ดำรงค ทัพโยธา  
รองศาสตราจารย์ณัฐฐานถ ไตรภพ  
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์

มกราคม 2558

## สารบัญ

	หน้า
<b>บทที่ 1 ลำดับและอนุกรมของจำนวน</b>	<b>1</b>
1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	1
1.2 ลำดับของจำนวนจริง	7
1.3 ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน	17
1.4 อนุกรมของจำนวนจริง	22
1.5 อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน	52
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 1	58
<b>บทที่ 2 อนุกรมกำลัง</b>	<b>61</b>
2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า	65
2.2 การหาอนุพันธ์ของอนุกรมกำลัง	69
2.3 การประมาณค่าโดยใช้สูตรทอแยลเลอร์	73
2.4 อนุกรมทอแยลเลอร์	85
2.5 การประมาณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต	89
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 2	111
<b>บทที่ 3 ปริภูมิสามมิติ</b>	<b>113</b>
3.1 พิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ	113
3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ	119
3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ	135
3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ	161
3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และเส้นโค้ง	190
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 3	224
<b>บทที่ 4 ระบบพิกัดเชิงขั้ว</b>	<b>233</b>
4.1 จุดและสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว	234
4.2 การเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว	244
4.3 สมมาตรของกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว	256
4.4 การหาพื้นที่ของบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว	271
คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 4	288

บทที่ 5	ฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปร	293
5.1	ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร	294
5.2	ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของสองตัวแปร	303
5.3	อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปร	320
5.4	กฎลูกโซ่	329
5.5	อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง	341
5.6	ค่าเชิงอนุพันธ์รวม	348
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 5	355
บทที่ 6	อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปร	365
6.1	อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	365
6.2	อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป	375
6.3	อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปรในระบบพิกัดเชิงขั้ว	396
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 6	414
บทที่ 7	สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	419
7.1	สมการแยกตัวแปรได้	422
7.2	สมการเอกพันธ์	426
7.3	สมการแม่นตรง	431
7.4	สมการเชิงเส้น	442
7.5	การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์	453
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 7	461
	สรุปสูตรบทที่ 3	465
	กราฟของรอยทางเดินของการเคลื่อนที่	469
	กราฟของฟังก์ชัน $r = f(\theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว	470
	กราฟของฟังก์ชัน $f(x, y)$	472
	สรุปสูตรบทที่ 7	473
	บรรณานุกรม	475
	ดัชนี	477

# บทที่ 1

## ลำดับและอนุกรมของจำนวน

ในการศึกษาเกี่ยวกับลำดับและอนุกรมของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน การหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตจำเป็นต้องทำการพิสูจน์ข้อความหรือสูตรในพจน์ของจำนวนนับ ดังนั้นในหัวข้อแรกของบทที่ 1 นี้ เราจะกล่าวถึงอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับว่าเป็นจริง เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาเรื่องลำดับและอนุกรมต่อไป

หมายเหตุ ในหนังสือเล่มนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$N$  แทน เซตของจำนวนนับทั้งหมด

$R$  แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$C$  แทน เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด

### 1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ  $n$  ว่าเป็นจริง เราใช้วิธีการต่อไปนี้

สำหรับจำนวนนับ  $n$  ให้  $P(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$  ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

(1)  $P(1)$  เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ  $k$  ใด ๆ ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k + 1)$  เป็นจริง

ดังนั้น  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$

เราเรียกวิธีการนี้ว่า อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

## ตัวอย่าง 1.1.1

จงพิสูจน์ว่า  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$  ทุกจำนวนนับ  $n$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใด ๆ

ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

เนื่องจาก  $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$  ดังนั้น  $P(1)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับใด ๆ

สมมติว่า  $P(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

ดังนั้น  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

แสดงว่า  $P(k+1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$

นั่นคือ  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$  ทุกจำนวนนับ  $n$  □

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิสูจน์ว่า  $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนนับ  $n$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใด ๆ

ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว

เนื่องจาก  $5^1 - 2^1 = 3$  ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว

ดังนั้น  $P(1)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับใด ๆ

สมมติว่า  $P(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า  $5^k - 2^k$ หารด้วย 3 ลงตัว

จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม  $m$  ซึ่ง  $5^k - 2^k = 3m$  ... (1)

พิจารณา  $5^{k+1} - 2^{k+1} = 5(5^k) - 2(2^k)$



$$\begin{aligned}
 &= (3 + 2)(5^k) - 2(2^k) \\
 &= 3(5^k) + 2(5^k) - 2(2^k) \\
 &= 3(5^k) + 2(5^k - 2^k) \\
 &= 3(5^k) + 2(3m) \quad \text{(จาก (1))} \\
 &= 3(5^k + 2m)
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $5^k + 2m$  เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น  $5^{k+1} - 2^{k+1}$  หารด้วย 3 ลงตัว แสดงว่า  $P(k+1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$

นั่นคือ  $5^n - 2^n$  หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนนับ  $n$   $\square$

### ตัวอย่าง 1.1.3

จงพิสูจน์ว่า  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  ทุกจำนวนนับ  $n$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใดๆ

ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

เนื่องจาก  $1(1+1) = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$

ดังนั้น  $P(1)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับใดๆ

สมมติว่า  $P(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

ดังนั้น  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2) \left( \frac{k}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

แสดงว่า  $P(k+1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$

นั่นคือ  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  ทุกจำนวนนับ  $n$   $\square$

นอกจากอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะใช้พิสูจน์ข้อความ  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$  แล้ว เราอาจประยุกต์ใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ข้อความ  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n \geq m$  เมื่อ  $m$  เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยมีวิธีการต่อไปนี้

สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใด ๆ ซึ่ง  $n \geq m$  ให้  $P(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$  ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

(1)  $P(m)$  เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ  $k$  ใด ๆ ซึ่ง  $k \geq m$  ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k+1)$  เป็นจริง ดังนั้น  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n \geq m$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า  $2^n > n^2$  ทุกจำนวนนับ  $n \geq 5$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใด ๆ ซึ่ง  $n \geq 5$

ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $2^n > n^2$

เนื่องจาก  $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

ดังนั้น  $P(5)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง  $k \geq 5$

สมมติว่า  $P(k)$  เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า  $2^k > k^2$

ดังนั้น  $2(2^k) > 2k^2$

$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$

$$\geq k^2 + 5k$$

(เพราะว่า  $k \geq 5$  เพราะฉะนั้น  $k^2 \geq 5k$ )

$$= k^2 - 2k + 3k$$

$$> k^2 - 2k + 1$$

(เพราะว่า  $k \geq 5$  เพราะฉะนั้น  $3k > 1$ )

$$= (k+1)^2$$

เพราะฉะนั้น  $2^{k+1} > (k+1)^2$

แสดงว่า  $P(k+1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n \geq 5$

นั่นคือ  $2^n > n^2$  ทุกจำนวนนับ  $n \geq 5$  □