



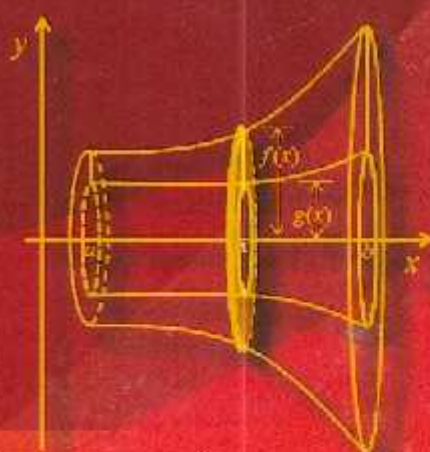
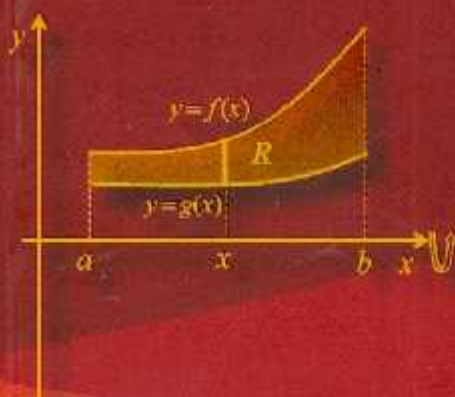
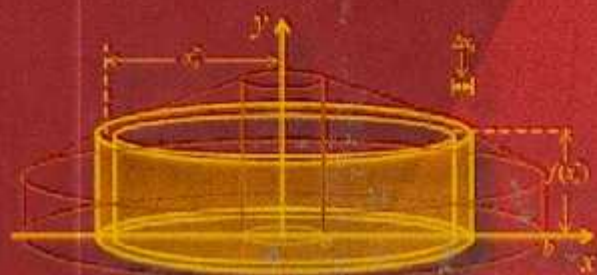
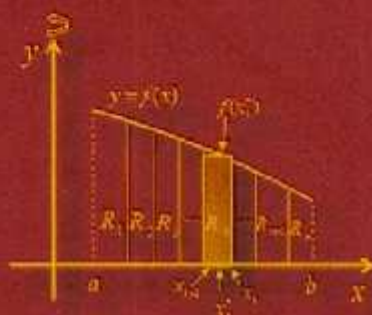
72 ปี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
พ.ศ. 2508-2580



สำนักพิมพ์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร

Calculus of one variable



$$\int_0^2 (2-2y)^2 dy + \int_2^4 [(2y^2-2)] dy$$

$$= 2 \left[\left(2y - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{2y^3}{3} - 2y \right) \Big|_2^4 \right]$$

$$= 2 \left[\left[\left(2 - \frac{2}{3} \right) - 0 \right] + \left[\left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) \right] \right]$$

$$= 2 \left(\frac{12}{3} \right) = \frac{24}{3}$$

ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักษ์



แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร

อาจารย์ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักษ์

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์พื้นฐานและพลศึกษา

คณะวิทยาศาสตร์ ศรีราชา

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตศรีราชา

เลขทะเบียน **M 0145028**

วันลงทะเบียน = ๒ มี.ค. ๒๕๕๘

เลขเรียกหนังสือ ๖๑๕๖๓
๕๖๕๖๓
๕๖๕๖๓



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ราคา 300 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1
กันยายน 2557
จำนวน 1,000 เล่ม
สงวนลิขสิทธิ์



ข้อมูลทางบรรณานุกรม

ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจงจักร์.

แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร / ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจงจักร์. — กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2557.

380 หน้า.

1. แคลคูลัส.

GA303.2 .ณ17

ISBN 978-616-556-145-7

จัดพิมพ์โดย :

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

50 ถนนงามวงศ์วาน จตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทรศัพท์/โทรสาร 0-2940-5501-2, 0-2942-8056

<http://ku-press.ku.ac.th>

e-mail : kup@ku.ac.th

จัดจำหน่ายโดย :

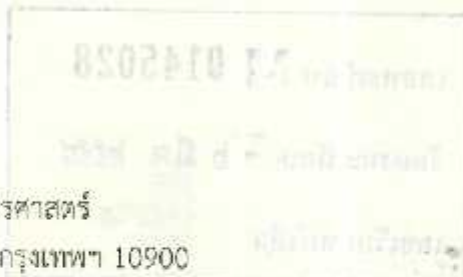
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ตู้อปฉ. 1066 ปณ.เกษตรศาสตร์

ถนนงามวงศ์วาน กรุงเทพฯ 10903

โทรศัพท์ 0-2579-9596, 0-2942-8063-5

โทรสาร 0-2579-9597, 0-2942-8067



คำนำ

แคลคูลัสฉบับนี้ได้ว่าเป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งสำหรับนิสิต นักศึกษาระดับปริญญาตรีหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต และหลักสูตรอื่นๆ อีกหลายหลักสูตรซึ่งจำเป็นต้องนำความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาวิชาเฉพาะด้านหรือวิชาขั้นสูงในสาขาวิชาเอก ดังนั้น ในตำรา แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร เล่มนี้ ผู้เขียนจึงได้เรียบเรียงขึ้นโดยมุ่งเน้นให้เนื้อหา มีความครอบคลุมและทันสมัยมากที่สุด ประกอบด้วย 7 บทเรียน ได้แก่ บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง บทที่ 2 การหาอนุพันธ์ บทที่ 3 การประยุกต์อนุพันธ์ บทที่ 4 การหาปริพันธ์ บทที่ 5 ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์ บทที่ 6 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และบทที่ 7 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข ซึ่งสำหรับเนื้อหาในแต่ละบทนั้น ได้กล่าวถึงแนวคิด มุขนิยาม ทฤษฎีบท สรุปหลักการขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหา พร้อมทั้งยกตัวอย่างและแสดงวิธีทำอย่างละเอียด ตลอดจนมีแบบฝึกหัดสำหรับให้ผู้อ่านได้ฝึกฝนเพื่อเป็นการทบทวนความเข้าใจในแต่ละหัวข้ออีกด้วย

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชัย ตันยธัชมาภุฒ และรองศาสตราจารย์นางนุช สุขวารี ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆ จนทำให้ตำราเล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเล่มนี้คงจะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่านทุกท่านที่มีความประสงค์ในการอ่านเพื่อประกอบการเรียน การสอน ทบทวนบทเรียน ตลอดจนการอ่านเพื่อเพิ่มพูนความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักษ์

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

- | | | |
|------------------------------|---|----|
| 1.1 | ลิมิตของฟังก์ชันและทฤษฎีบทของลิมิต | 1 |
| 1.1.1 | ลิมิตของค่าฟังก์ชัน | 1 |
| 1.1.2 | บทนิยามของลิมิต | 3 |
| 1.1.3 | ทฤษฎีบทของลิมิต | 3 |
| 1.1.4 | การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $0/0$ | 7 |
| 1.1.5 | ทฤษฎีบทการบีบ | 13 |
| 1.2 | ลิมิตด้านเดียว | 19 |
| 1.3 | ลิมิตค่าอนันต์ | 23 |
| 1.3.1 | การหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ที่มีลิมิตอยู่ในรูป $L/0$
เมื่อ L เป็นจำนวนจริงใดๆ | 26 |
| 1.4 | ลิมิต ณ อนันต์ | 31 |
| 1.4.1 | การหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ซึ่งมีลิมิตอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด ∞/∞ | 34 |
| 1.4.2 | การหาค่าของลิมิต ณ อนันต์ ที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\infty - \infty$ | 38 |
| 1.5 | ความต่อเนื่อง | 42 |
| 1.5.1 | ความต่อเนื่องบนช่วงและสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง | 47 |
| 1.5.2 | การขยายความต่อเนื่องไปยังจุด | 50 |
| 1.6 | ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ | 54 |
| บทที่ 2 การหาอนุพันธ์ | | |
| 2.1 | อนุพันธ์และอัตราการเปลี่ยนแปลง | 65 |
| 2.1.1 | เส้นสัมผัส | 65 |
| 2.1.2 | ความเร็ว | 68 |
| 2.1.3 | อัตราการเปลี่ยนแปลง | 69 |

	หน้า
2.1.4 อนุพันธ์	71
2.1.5 การหาอนุพันธ์ได้บนช่วงและอนุพันธ์ด้านเดียว	73
2.1.6 ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง	75
2.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	78
2.3 อนุพันธ์อันดับสูง	86
2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	89
2.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	98
2.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	108
2.6.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอาร์กไซน์	109
2.6.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์	109
2.6.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอาร์กเซแคนต์	110
2.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม	118
2.7.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังธรรมชาติ	117
2.7.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ	117
2.7.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	119
2.7.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม	119
2.7.5 การหาอนุพันธ์โดยใช้ลอการิทึม	121
2.8 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	125
2.8.1 เอกภาคสมของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	127
2.8.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	128
2.9 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	132
2.9.1 สมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	133
2.9.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	135
2.10 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย	139
2.11 การหาอนุพันธ์ของสมการเชิงตัวแปรเสริม	143
2.12 ผลต่างเชิงอนุพันธ์	150

2.12.1 ความหมายของเรขาคณิตของผลต่างเชิงอนุพันธ์	152
2.12.2 การประมาณค่าโดยใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์	153
2.12.3 การหาค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์	156
บทที่ 3 การประยุกต์อนุพันธ์	
3.1 อัตราสัมพัทธ์	160
3.2 รูปแบบยังไม่กำหนดและหลักเกณฑ์ของโลปีตาล	169
3.2.1 รูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $0/0$	169
3.2.2 รูปแบบยังไม่กำหนดชนิด ∞/∞	173
3.2.3 รูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $0-\infty$	176
3.2.4 รูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\infty-\infty$	178
3.2.5 รูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $0^0, \infty^0, 1^\infty$	180
3.3 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	185
3.4 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และความเว้า	188
3.4.1 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	188
3.4.2 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า	192
3.5 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน	201
3.5.1 ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดสัมพัทธ์	201
3.5.2 ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดสัมบูรณ์	208
3.6 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	215
3.6.1 เส้นสัมผัสแนวแกนและเส้นสัมผัสแนวอื่น	215
3.6.2 ขั้นตอนสำหรับการเขียนกราฟ	217
3.7 ทฤษฎีบทของรอลและทฤษฎีบทค่ามัธยิม	225
3.7.1 ทฤษฎีบทของรอล	225
3.7.2 ทฤษฎีบทค่ามัธยิม	227
บทที่ 4 การหาปริพันธ์	
4.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	232

4.2	การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า	239
4.3	การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน	246
4.4	การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	251
4.4.1	การหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป $\int \sin^m x \cos^n x dx$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก	251
4.4.2	การหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ หรือ $\int \cos mx \cos nx dx$	253
4.4.3	การหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป $\int \tan^m x \sec^n x dx$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ	255
4.4.4	การหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป $\int \cot^m x \csc^n x dx$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ	259
4.5	การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	263
4.6	การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยเศษส่วนย่อย	270
4.6.1	การหาปริพันธ์โดยการเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย	271
4.6.2	การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้โดยการหารพหุนาม	277
4.7	การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับนิพจน์มีเลขยกกำลังเป็นเศษส่วน	279
4.8	การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะของนิพจน์ไบนารีและโคไซน์	283
บทที่ 5 ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์		
5.1	ผลบวกรีมันน์และปริพันธ์จำกัดเขต	287
5.1.1	สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต	290
5.1.2	ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	293
5.1.3	การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนค่า	298
5.1.4	ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันสมมาตร	302
5.2	การประยุกต์ปริพันธ์จำกัดเขต	306
5.2.1	พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	306

	หน้า
5.2.2 ปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบงาน	319
5.2.3 ปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก	332
บทที่ 6 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	
6.1 ปริพันธ์เหนือช่วงอนันต์	342
6.2 ปริพันธ์ที่มีตัวถูกหาปริพันธ์มีภาวะไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์	347
บทที่ 7 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข	
7.1 การประมาณผลบวกเรียมน์	355
7.2 การประมาณเชิงสี่เหลี่ยมคางหมู	359
7.3 หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน	364
บรรณานุกรม	373
ครุขนิ	374
Index	377

บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่อง

(Limits and Continuity)

1.1 ลิมิตของฟังก์ชันและทฤษฎีบทของลิมิต

ในหัวข้อนี้ เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาแนวคิด บทนิยามและทฤษฎีบทลิมิต ตลอดจนวิธีการหาลิมิตของฟังก์ชันซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการศึกษา ในหัวข้ออนุพันธ์และปริพันธ์ต่อไป

1.1.1 ลิมิตของค่าฟังก์ชัน (limits of function values)

ก่อนที่จะอธิบายถึงบทนิยามและทฤษฎีบทลิมิตจะขอยกตัวอย่าง เพื่อให้ผู้เรียนเห็นแนวคิดซึ่งจะนำไปสู่ความเข้าใจในการศึกษาเรื่องลิมิตต่อไป

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ซึ่ง f ไม่นิยามที่ $x = 1$ (หารด้วยศูนย์) ถ้า x เข้าสู่อำนาจ 1 แล้ว จงพิจารณาค่าของ $f(x)$

วิธีทำ จะพบว่าฟังก์ชัน f นิยามสำหรับทุกจำนวนจริง x ยกเว้น $x = 1$ (เพราะหารด้วยศูนย์) ซึ่งค่าของ f เมื่อ x เข้าสู่อำนาจ 1 แสดงดังตาราง

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1	...	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	ไม่ นิยาม	...	2.0001	2.001	2.01	2.1

จากตารางจะพบว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าสู่อำนาจ 2 เมื่อ x เข้าสู่อำนาจ 1 ทั้งในกรณีที่มี $x < 1$ และ $x > 1$ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่อำนาจ 1 ทั่วทั้ง 2 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างจะพบว่า แม้ว่าค่าของ $f(x)$ จะไม่นิยามที่ $x = 1$ แต่ $f(x)$ มีลิมิตเมื่อ x เข้าสู่อำนาจ 1