



คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การวิเคราะห์เชิงซ้อน **Complex Analysis**

อาจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ลิ้มบุญศิริพร

ภาคคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร



การวิเคราะห์เชิงซ้อน

Complex Analysis

อาจารย์ ดร. ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศิลปากร

เลขทะเบียน M 0141390

วันลงทะเบียน 4 ส.ค. 2557

เลขเรียกหนังสือ

015.9
ป.418ก.
2557

(41)

การวิเคราะห์เชิงซ้อน

Complex Analysis

ผู้เขียน

อาจารย์ ดร. ประสิทธิ์ ลีมบุพศิริพร

วท.บ. (เกียรตินิยม) คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ (พิชญ์โลก)

วท.ม. คณิตศาสตร์ รุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

M.Sc. Mathematical Sciences, Clemson University, USA

Ph.D. Mathematical Sciences, Clemson University, USA

พิมพ์ครั้งที่ 1 : 2557

สงวนลิขสิทธิ์

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ประสิทธิ์ ลีมบุพศิริพร.

การวิเคราะห์เชิงซ้อน. นครปฐม : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2557.

309 หน้า

1. การวิเคราะห์เชิงซ้อน. I. ชื่อเรื่อง

ISBN 978-616-348-779-7

โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

คำนำ

หนังสือการวิเคราะห์เชิงซ้อนนี้ได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการเรียนการสอนวิชาตัวแปรเชิงซ้อน ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรีของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และเพื่อให้ผู้ที่สนใจทั่วไปสามารถนำไปใช้ประกอบการศึกษาค้นคว้า จุดประสงค์หลักของการจัดทำหนังสือเล่มนี้ก็เพื่อให้ผู้ที่สนใจเกิดความเข้าใจในมุมมองของวิชาการวิเคราะห์เชิงซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ โดยในการเกริ่นนำในแต่ละเรื่อง ผู้เขียนได้สอดแทรกแนวคิดต่างๆที่เป็นหลักการพื้นฐานที่จะนำไปสู่การกำหนดบทนิยามต่างๆ รวมถึงการให้หลักการเชิงลึกที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทและบทพิสูจน์ที่สำคัญๆ พร้อมกันนั้นก็ได้รวบรวมตัวอย่างประกอบเพื่อให้ผู้อ่านได้เกิดความเข้าใจและสามารถเชื่อมโยงกับการประยุกต์ใช้งานจริง สำหรับเค้าโครงของเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ ส่วนใหญ่มีความคล้ายคลึงกับเค้าโครงของวิชาแคลคูลัส ดังนั้นเพื่อให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจในการศึกษาหนังสือเล่มนี้มากขึ้น ผู้อ่านควรมีความรู้พื้นฐานในวิชาแคลคูลัสเป็นอย่างดี มีข้อสังเกตเกี่ยวกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับบทพิสูจน์ในหลายเรื่องที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ที่ได้มีการระบุไว้ จุดประสงค์สำคัญก็เพื่อให้ผู้อ่านได้ฝึกฝนการเขียนบทพิสูจน์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับเนื้อหาที่มีความคล้ายคลึงกับที่กล่าวไว้วิชาแคลคูลัส (หรือวิชาคณิตวิเคราะห์) ผู้อ่านควรจะได้ศึกษาหาข้อแตกต่างของเนื้อหาเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอดทางการศึกษา ในการใช้หนังสือเล่มนี้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด ผู้อ่านควรจะได้ทำแบบฝึกหัดที่ได้จัดทำไว้ในหัวข้อสำคัญของแต่ละบท เพราะการทำแบบฝึกหัดถือเป็นหัวใจหลักในการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีที่สุด

หนังสือเล่มนี้ครอบคลุมเนื้อหาหลักต่อไปนี้

ในบทที่ 1 จะกล่าวถึงบทนิยามและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อน เนื้อหาส่วนใหญ่จะกล่าวถึงสมบัติเกี่ยวกับลิมิต ความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน นอกจากนี้ ยังได้กล่าวถึงสมบัติพิเศษของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่เรียกว่า สมบัติการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ สมบัตินี้ถือว่ามีความสำคัญในการศึกษาอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 4

สำหรับเนื้อหาในบทที่ 3 จะกล่าวถึงฟังก์ชันมูลฐาน ฟังก์ชันมูลฐานเป็นชื่อเรียกฟังก์ชันที่เราคุ้นเคยกันในการเรียนวิชาแคลคูลัส ฟังก์ชันมูลฐานที่ศึกษาในวิชานี้เป็นการต่อยอดเนื้อหาของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงเพื่อปรับใช้กับฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อน ฟังก์ชันเหล่านี้ได้แก่ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันไฮเพอร์โบลิก สำหรับแนวทางของการศึกษาฟังก์ชันเหล่านี้ จะเป็นการศึกษาสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของฟังก์ชัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะเน้นถึงการศึกษาสมบัติต่างๆของฟังก์ชันที่กล่าวไว้ในบทที่ 2

ในบทที่ 4, 5 และ 6 เนื้อหาส่วนใหญ่จะกล่าวถึงอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อนที่เรียกว่า คอนทัวร์อินทิกรัล สำหรับในบทที่ 4 นั้นจะกล่าวถึงสมบัติทั่วไปของคอนทัวร์อินทิกรัลและทฤษฎีบทที่สำคัญๆ เช่นทฤษฎีบทโคชี-กูร์ชาร์ต สูตรอินทิกรัลโคชี ทฤษฎีบทของลีอูวีลล์ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต นอกจากนี้ ในตอนท้ายของบทนี้ เรายังได้กล่าวถึงหลักการหาค่าสูงสุดของมอดุลัสของฟังก์ชันด้วย

สำหรับเนื้อหาในบทที่ 5 จะกล่าวถึงลำดับและอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน เนื้อหาส่วนใหญ่จะเป็นกล่าวถึงการนำอนุกรมไปใช้ในการหาคอนทัวร์อินทิกรัลตามคอนทัวร์ปิด อนุกรมที่มีบทบาทมากในการศึกษาในเรื่อง

นี่คืออนุกรมท้ายเลอร์และอนุกรมลอเรนต์ซึ่งได้นำมากล่าวไว้ในบทนี้ด้วย

สำหรับเนื้อหาในบทที่ 6 จะกล่าวถึงทฤษฎีบทส่วนตกค้าง ซึ่งมีบทบาทในการประยุกต์เพื่อหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันตัวจริงซึ่งรวมถึงการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบด้วย

ในบทที่ 7 ซึ่งเป็นบทสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้ จะกล่าวถึงการส่งต่องแบบซึ่งเป็นการส่งที่มีความสำคัญในการศึกษาวิชาอื่นและการประยุกต์ในด้านต่างๆ

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนและการสอนวิชาการวิเคราะห์เชิงซ้อนหรือวิชาอื่นๆที่เกี่ยวข้อง รวมถึงสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับสูง อย่างไรก็ตามในการเขียนหนังสือเล่มนี้ อาจมีข้อผิดพลาดบ้าง หากท่านผู้อ่านมีข้อเสนอแนะใดที่จะเป็นประโยชน์และทำให้หนังสือเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้เขียนขออภัยด้วยความขอบคุณและยินดีนำไปปรับปรุงแก้ไข

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ที่มีส่วนช่วยส่งเสริมในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ และขอขอบคุณอาจารย์ ดร.จิราภา ลีมบุพศิริพร ที่เป็นกำลังใจและช่วยสนับสนุนให้การจัดทำหนังสือเล่มนี้สำเร็จได้ด้วยดี

อาจารย์ ดร. ประสิทธิ์ ลีมบุพศิริพร
ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร
prasit@su.ac.th

กุมภาพันธ์ 2557

สารบัญ

บทที่ 1	จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)	1
1.1	บทนำและสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน	1
1.1.1	ความหมายทางเรขาคณิตของจำนวนเชิงซ้อน	9
1.1.2	สมบัติของสังยุคและมอดุลัส	13
1.1.3	จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว	20
1.1.4	สูตรของออยเลอร์	23
1.1.5	สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเลขชี้กำลัง	24
1.1.6	รากของจำนวนเชิงซ้อน	29
1.2	บริเวณในระนาบเชิงซ้อน	34
บทที่ 2	ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Functions)	43
2.1	ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน	43
2.2	การส่ง	45
2.3	ลิมิตและความต่อเนื่อง	50
2.3.1	ลิมิตของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน	50
2.3.2	จุดที่ต่อเนื่องและลิมิตของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน	56
2.3.3	ความต่อเนื่อง	60
2.4	อนุพันธ์ของฟังก์ชันและฟังก์ชันวิเคราะห์	65
2.4.1	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	65
2.4.2	สมการโคชี-รีมันน์	68
2.4.3	ฟังก์ชันวิเคราะห์	77
บทที่ 3	ฟังก์ชันมูลฐาน (Elementary Functions)	86
3.1	ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	86
3.1.1	ลิมิต ความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	90
3.2	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	92
3.2.1	ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	92
3.2.2	ฟังก์ชันตรีโกณมิติรูปอื่นๆ	98
3.3	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	99
3.3.1	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์	99
3.3.2	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกรูปอื่นๆ	100
3.4	ลอการิทึม	102
3.4.1	แนวคิดเบื้องต้นและบทนิยามของลอการิทึม	102
3.4.2	สมบัติของลอการิทึมหลัก	106

3.4.3	สมบัติอื่นของลอการิทึม	108
3.4.4	กิ่งของลอการิทึม	109
3.5	เลขยกกำลังเชิงซ้อน	110
3.6	ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	113
บทที่ 4	อินทิกรัล (Integrals)	118
4.1	อินทิกรัลของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง	118
4.2	คอนทัวร์	128
4.2.1	สมการเส้นตรง	129
4.2.2	สมการวงกลม	131
4.2.3	พหามยาวเส้นโค้ง	133
4.2.4	เส้นโค้งเรียบ	135
4.2.5	เส้นโค้งสมมูลกัน	137
4.3	คอนทัวร์อินทิกรัล	139
4.3.1	สมบัติของคอนทัวร์อินทิกรัล	142
4.3.2	อินทิกรัลที่เป็นอิสระกับวิถี	148
4.3.3	ทฤษฎีบทโคชี-กูชาร์วิต	156
4.3.4	สูตรอินทิกรัลโคชี	168
4.3.5	อนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์	171
4.3.6	ทฤษฎีบทของลีอูวีลล์และการประยุกต์	178
4.3.7	ค่าสูงสุดของมอดุลัสของฟังก์ชัน	180
บทที่ 5	อนุกรม (Series)	186
5.1	ลำดับและอนุกรมเบื้องต้น	186
5.1.1	ลำดับ	186
5.1.2	อนุกรม	192
5.2	อนุกรมกำลัง	198
5.3	อนุกรมเทย์เลอร์	201
5.4	อนุกรมลอเรนต์	210
5.4.1	ผลคูณและผลหารของอนุกรมกำลัง	217
บทที่ 6	ส่วนตกค้างและการประยุกต์ (Residues and Applications)	225
6.1	ภาวะเอกฐานและส่วนตกค้าง	225
6.1.1	จุดเอกฐาน	225
6.1.2	ส่วนตกค้าง	226
6.1.3	ชนิดของจุดเอกฐานที่เป็นเอกเทศ	233
6.2	การประยุกต์ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง	245
6.2.1	การหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตัวแปรจริง	245

6.2.2	การหาอินทิกรัลไม่ตรงแบบ	247
6.2.3	การหาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันคู่	250
6.2.4	การหาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	258
6.2.5	การหาอินทิกรัลเมื่อศูนย์ของอินทิแกแรนด์เป็นจำนวนจริง	264
บทที่ 7	การส่งคงแบบ (Conformal Mappings)	270
7.1	การส่ง	270
7.2	การส่งคงแบบ	289
บรรณานุกรม		298
ดัชนี		299

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

(Complex Numbers)

1.1 บทนำและสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อกล่าวถึงจำนวนต่างๆที่ใช้กันในชีวิตประจำวันแล้ว อาจกล่าวได้ว่าจำนวนจริงเป็นจำนวนที่คนทั่วไปคุ้นเคยกันมากที่สุด เป็นที่ทราบกันดีว่าจุดบนเส้นตรงมีสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับจำนวนจริง ความสมนัยนี้เป็นที่รู้จักกันดีและถูกนำไปใช้งานในรูปแบบของเส้นจำนวนนั่นเอง โดยอาศัยสมบัติของเส้นจำนวนและสมบัติเกี่ยวกับระยะทางของจุด เราสามารถนำความรู้เหล่านี้ไปศึกษาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหารของจำนวนจริงได้ นอกจากนี้เรายังสามารถอาศัยสมบัติของรูปทรงทางเรขาคณิตบางรูปอธิบายความสัมพันธ์ของจำนวนจริงต่างๆ ดังปรากฏในสูตรของพีทาโกรัส ในทางกลับกัน เราสามารถใช้สมบัติของจำนวนอธิบายสมบัติของรูปทรงทางเรขาคณิตได้เช่นกัน โดยภาพรวมแล้วอาจกล่าวได้ว่าสมบัติทางเรขาคณิตและสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริงสามารถประยุกต์ใช้งานในชีวิตประจำวันได้จริงจนอาจคิดว่าระบบจำนวนจริงน่าจะเพียงพอต่อการนำไปช่วยแก้ปัญหาต่างๆในชีวิตประจำวันได้อย่างครบถ้วน อย่างไรก็ตาม ถ้าพิจารณาในมุมมองของการพัฒนาระบบทางพีชคณิตแล้วจะพบว่าค่ากล่าวข้างต้นอาจไม่ถูกต้องนัก โดยเฉพาะถ้าพิจารณาจากทฤษฎีบทของสมการพื้นฐานต่อไปนี้

$$x^2 = -1 \tag{1.1.1}$$

จะเห็นว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงเลยทั้งนี้เพราะสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ $x^2 \geq 0$ เสมอ เมื่อพิจารณาอย่างผิวเผินอาจเห็นว่าการมีผลเฉลยของสมการนี้เกินความจำเป็น อย่างไรก็ตามได้ พบว่าปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีความสำคัญและได้มีการศึกษามาตั้งแต่ศตวรรษที่ 15 มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านในช่วงเวลาดังกล่าวได้คิดค้นที่จะนำจำนวนที่เป็นผลเฉลยของสมการ (1.1.1) มาใช้ประโยชน์และต่อมาได้พบว่าจำนวนดังกล่าวสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหาได้จริง จากผลการค้นคิดดังกล่าวจึงเป็นที่มาของการพัฒนาระบบจำนวนจริง (ซึ่งเป็นระบบที่รู้จักกันดีในยุคนั้น) ระบบจำนวนที่ได้จากการพัฒนานี้ก็คือ ระบบจำนวนเชิงซ้อน

อาจกล่าวได้ว่าจำนวนซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (1.1.1) เป็นหัวใจหลักในการพัฒนาจำนวนเชิงซ้อน เรานิยมเขียนแทนจำนวนนี้ด้วย i สมมติว่าเราต้องการพัฒนาระบบจำนวนจริงโดยการยอมรับว่าจำนวน i นี้มีอยู่จริง ในกรณีนี้อาจเกิดคำถามขึ้นหลายข้อ เช่น มีโครงสร้างทางพีชคณิต (algebraic structure) ที่ทำให้เกิดการสร้างจำนวนใหม่จากจำนวน i กับจำนวนจริงหรือไม่ และจำนวนใหม่ที่เกิดจากโครงสร้างทางพีชคณิตนี้มีรูปแบบเป็นอย่างไร ประเด็นที่น่าสนใจคือโครงสร้างใหม่ทางพีชคณิตนี้สามารถเข้ากันได้กับโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนจริงเดิมได้หรือไม่ กล่าวคือเราสามารถกำหนดการบวกและการคูณกันระหว่างจำนวนจริงกับจำนวนใหม่ได้โดยที่การบวกและการคูณนี้ยังคงสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริงในระบบจำนวนจริงด้วย

สังเกตว่าถ้ามีโครงสร้างที่เข้ากันได้ดังกล่าวโดยมี i และจำนวนจริงเป็นจำนวนที่ทำให้เกิดจำนวนในระบบ ดังนั้นภายใต้การดำเนินการทางพีชคณิตของระบบใหม่แล้ว อาจกล่าวได้ว่าจำนวนในระบบนี้ควรมีรูปแบบ

อย่างง่ายเป็น

$$a + ib \quad (1.1.2)$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ เราพบว่าโดยความเป็นจริงแล้วเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกในรูปแบบ (1.1.2) สามารถมีโครงสร้างทางพีชคณิตที่เข้ากันได้กับระบบจำนวนจริงซึ่งเป็นที่มาของระบบจำนวนเชิงซ้อนนั่นเอง เราเรียกจำนวนที่อยู่ในรูป (1.1.2) ว่า จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

สังเกตว่าเครื่องหมายบวกและคูณใน (1.1.2) ไม่ใช่เครื่องหมายทางพีชคณิตของจำนวนจริง แต่เป็นเครื่องหมายทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งยังไม่ได้มีการกำหนดความหมายที่ชัดเจนไว้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจในเครื่องหมายทางพีชคณิตเหล่านี้และโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนเชิงซ้อน เราจำเป็นต้องกำหนดบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนรวมถึงโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนเชิงซ้อนให้เกิดความชัดเจนมากกว่าที่กล่าวมาข้างต้น ในบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนที่จะกล่าวต่อไปนี้เราจะใช้คู่อันดับของจำนวนจริงเป็นเครื่องมือในการอธิบายโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอาจมีความแตกต่างจากที่กล่าวมาข้างต้นอย่างไรก็ตาม เราจะได้แสดงให้เห็นในภายหลังว่าจำนวนเชิงซ้อนที่อธิบายด้วยคู่อันดับดังกล่าวสามารถอธิบายด้วยรูปแบบ (1.1.2) ได้เช่นกัน นอกจากนี้เราจะได้พบว่าการนิยามจำนวนเชิงซ้อนด้วยคู่อันดับนี้จะช่วยเสริมสร้างมุมมองใหม่เชิงเรขาคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้เป็นอย่างดี

ก่อนที่จะได้กล่าวถึงบทนิยามของระบบจำนวนเชิงซ้อนจะขอกกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญของของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นผลจากการสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อนโดยอาศัยสมการ (1.1.1) กล่าวคือในระบบจำนวนเชิงซ้อน สมการพหุนามหรือสมการที่มีรูปทั่วไปเป็น

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

มีผลเฉลยเสมอ เราจะได้กล่าวถึงรายละเอียดต่างๆเหล่านี้ต่อไป

บทนิยาม 1.1.1 ระบบจำนวนเชิงซ้อนหมายถึงเซตของคู่อันดับใน \mathbb{R}^2 (ซึ่งต่อไปจะเขียนแทนเซตนี้ด้วย \mathbb{C}) ภายใต้การบวกและการคูณดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

เรียกสมาชิกที่อยู่ใน \mathbb{C} ว่า จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

ถ้า $z = (x, y)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วเราเรียกจำนวนจริง x และจำนวนจริง y ว่าส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และจะเขียนแทนส่วนจริงของ z และส่วนจินตภาพของ z ด้วยสัญลักษณ์ $\operatorname{Re}(z)$ และ $\operatorname{Im}(z)$ ตามลำดับ

หมายเหตุ 1.1.1 1. โดยสมบัติของคู่อันดับจะได้ว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ

$$z_1 = z_2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

2. จากสมบัติการบวกของจำนวนเชิงซ้อนจะได้ว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$