คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การวิเคราะห์เชิงซ้อน
Complex Analysis

อาจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร

การวิเคราะห์เชิงซ้อน

Complex Analysis

อาจารย์ ดร. ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศิลปากร

โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การวิเคราะห์เชิงซ้อน

Complex Analysis

ผู้เขียน **อาจารย์ ดร. ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร**

วท.บ. (เกียรตินิยม) คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ (พิษณุโลก)

วท.ม. คณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

M.Sc. Mathematical Sciences, Clemson University, USA

Ph.D. Mathematical Sciences, Clemson University, USA

พิมพ์ครั้งที่ 1 : 2557

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร.

การวิเคราะห์เชิงซ้อน. นครปฐม : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2557.

309 หน้า

1. การวิเคราะห์เชิงซ้อน. I. ชื่อเรื่อง

ISBN 978-616-348-779-7

โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

คำนำ

หนังสือการวิเคราะห์เชิงซ้อนนี้ได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการเรียนการสอนวิชาตัวแปรเชิงซ้อน ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรีของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และเพื่อให้ผู้ที่สนใจทั่วไปสามารถนำไปใช้ประกอบการศึกษาค้นคว้า จุดประสงค์หลักของการจัดทำหนังสือเล่มนี้ก็เพื่อให้ผู้ที่สนใจเกิดความเข้าใจในมุมมองของวิชาการวิเคราะห์เชิงซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ โดยในการเกริ่นนำในแต่ละเรื่อง ผู้เขียนได้สอดแทรกแนวคิดต่าง ๆที่เป็นหลักการพื้นฐานที่จะนำไปสู่การกำหนดบทนิยามต่าง ๆ รวมถึงการให้หลักการเชิงลึกที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทและบทพิสูจน์ที่สำคัญ ๆ พร้อมกันนั้นก็ได้รวบรวมตัวอย่างประกอบเพื่อให้ผู้อ่านได้เกิดความเข้าใจและสามารถเชื่อมโยงกับการประยุกต์ใช้งานจริง สำหรับเค้าโครงของเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ ส่วนใหญ่มีความคล้ายคลึงกับเค้าโครงของวิชาแคลคูลัส ดังนั้นเพื่อให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจในการศึกษาหนังสือเล่มนี้มากขึ้น ผู้อ่านควรมีความรู้พื้นฐานในวิชาแคลคูลัสเป็นอย่างน้อย มีข้อสังเกตเกี่ยวกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับบทพิสูจน์ในหลายเรื่องที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ที่ได้มีการละไว้ จุดประสงค์สำคัญก็เพื่อให้ผู้อ่านได้ฝึกฝนการเขียนบทพิสูจน์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับเนื้อหาที่มีความคล้ายคลึงกับที่กล่าวที่ไว้วิชาแคลคูลัส (หรือวิชาคณิตวิเคราะห์) ผู้อ่านควรจะได้ศึกษาหาข้อแตกต่างของเนื้อหาเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอดทางการศึกษา ในการใช้หนังสือเล่มนี้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด ผู้อ่านควรจะได้ทำแบบฝึกหัดที่ได้จัดทำไว้ในหัวข้อสำคัญ ๆของแต่ละบท เพราะการทำแบบฝึกหัดถือเป็นหัวใจหลักในการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีที่สุด

หนังสือเล่มนี้ครอบคลุมเนื้อหาหลักต่อไปนี้

ในบทที่ 1 จะกล่าวถึงบทนิยามและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อน เนื้อหาส่วนใหญ่จะกล่าวถึงสมบัติเกี่ยวกับลิมิต ความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน นอกจากนี้ ยังได้กล่าวถึงสมบัติพิเศษของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่เรียกว่า สมบัติการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ สมบัตินี้ถือว่ามีความสำคัญในการศึกษาอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 4

สำหรับเนื้อหาในบทที่ 3 จะกล่าวถึงฟังก์ชันมูลฐาน ฟังก์ชันมูลฐานเป็นชื่อเรียกฟังก์ชันที่เรามักคุ้นเคยกันในการเรียนวิชาแคลคูลัส ฟังก์ชันมูลฐานที่ศึกษาในวิชานี้เป็นการต่อยอดเนื้อหาของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงเพื่อปรับใช้กับฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อน ฟังก์ชันเหล่านี้ได้แก่ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันไฮเพอร์โบลิก สำหรับแนวทางของการศึกษาฟังก์ชันเหล่านี้ จะเป็นการศึกษาสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของฟังก์ชัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะเน้นถึงการศึกษาสมบัติต่าง ๆของฟังก์ชันที่กล่าวไว้ในบทที่ 2

ในบทที่ 4, 5 และ 6 เนื้อหาส่วนใหญ่จะกล่าวถึงอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อนที่เรียกว่า คอนทัวร์อินทิกรัล สำหรับในบทที่ 4 นั้นจะกล่าวถึงสมบัติทั่วไปของคอนทัวร์อินทิกรัลและทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ เช่นทฤษฎีบทโคชี-กูร์ซาร์ต สูตรอินทิกรัลโคชี ทฤษฎีบทของลิอูวิลล์ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต นอกจากนี้ ในตอนท้ายของบทนี้ เรายังได้กล่าวถึงหลักการหาค่าสูงสุดของมอดุลัสของฟังก์ชันด้วย

สำหรับเนื้อหาในบทที่ 5 จะกล่าวถึงลำดับและอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน เนื้อหาส่วนใหญ่จะเป็นกล่าวถึงการนำอนุกรมไปใช้ในการหาคอนทัวร์อินทิกรัลตามคอนทัวร์ปิด อนุกรมที่มีบทบาทมากในการศึกษาในเรื่อง

นี้คืออนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมลอเรนต์ซึ่งได้นำมากล่าวไว้ในบทนี้ด้วย

สำหรับเนื้อหาในบทที่ 6 จะกล่าวถึงทฤษฎีบทส่วนตกค้าง ซึ่งมีบทบาทในการประยุกต์เพื่อหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันค่าจริงซึ่งรวมถึงการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบด้วย

ในบทที่ 7 ซึ่งเป็นบทสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้ จะกล่าวถึงการส่งคงแบบซึ่งเป็นการส่งที่มีความสำคัญในการศึกษาวิชานี้และการประยุกต์ในด้านต่างๆ

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนและการสอนวิชาการวิเคราะห์เชิงซ้อนหรือวิชาอื่นๆที่เกี่ยวข้อง รวมถึงสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับสูง อย่างไรก็ตามในการเขียนหนังสือเล่มนี้ อาจมีข้อผิดพลาดบ้าง หากท่านผู้อ่านมีข้อเสนอแนะใดที่จะเป็นประโยชน์และทำให้หนังสือเล่มนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้เขียนขอน้อมรับด้วยความขอบคุณและยินดีนำไปปรับปรุงแก้ไข

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ที่มีส่วนช่วยส่งเสริมในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ และขอขอบคุณอาจารย์ ดร.จิราภา ลิ้มบุพศิริพร ที่เป็นกำลังใจและช่วยสนับสนุนให้การจัดทำหนังสือเล่มนี้ให้สำเร็จได้ด้วยดี

อาจารย์ ดร. ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร
ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร
prasit@su.ac.th

กุมภาพันธ์ 2557

สารบัญ

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

(Complex Numbers)

1.1 บทนำและสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อกล่าวถึงจำนวนต่าง ๆที่ใช้กันในชีวิตประจำวันแล้ว อาจกล่าวได้ว่าจำนวนจริงเป็นจำนวนที่คนทั่วไปคุ้นเคยกันมากที่สุด เป็นที่ทราบกันดีว่าจุดบนเส้นตรงมีสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับจำนวนจริง ความสมนัยนี้เป็นที่รู้จักกันดีและถูกนำไปใช้งานในรูปแบบของเส้นจำนวนนั่นเอง โดยอาศัยสมบัติของเส้นจำนวนและสมบัติเกี่ยวกับระยะทางของจุด เราสามารถนำความรู้เหล่านี้ไปศึกษาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหารของจำนวนจริงได้ นอกจากนี้เรายังสามารถอาศัยสมบัติของรูปทรงทางเรขาคณิตบางรูปอธิบายความสัมพันธ์ของจำนวนจริงต่างๆ ดังปรากฏในสูตรของพีธาโกรัส ในทางกลับกัน เราสามารถใช้สมบัติของจำนวนอธิบายสมบัติของรูปทรงทางเรขาคณิตได้เช่นกัน โดยภาพรวมแล้วอาจกล่าวได้ว่าสมบัติทางเรขาคณิตและสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริงสามารถประยุกต์ใช้งานในชีวิตประจำวันได้จริงจนอาจคิดว่าระบบจำนวนจริงน่าจะเพียงพอต่อการนำไปช่วยแก้ปัญหาต่าง ๆในชีวิตประจำวันได้อย่างครบถ้วน อย่างไรก็ตาม ถ้าพิจารณาในมุมมองของการพัฒนาระบบทางพีชคณิตแล้วจะพบว่าคำกล่าวข้างต้นอาจไม่ถูกต้องนักโดยเฉพาะถ้าพิจารณาจากการหาผลเฉลยของสมการพื้นฐานต่อไปนี้

$$x^2 = -1 \tag{1.1.1}$$

จะเห็นว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงเลยทั้งนี้เพราะสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ $x^2 \geq 0$ เสมอ เมื่อพิจารณาอย่างผิวเผินอาจเห็นว่าการมีผลเฉลยของสมการนี้เกินความจำเป็น อย่างไรก็ตามได้ พบว่าปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีความสำคัญและได้มีการศึกษามาตั้งแต่ศตวรรษที่ 15 มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านในช่วงเวลาดังกล่าวได้คิดค้นที่จะนำจำนวนที่เป็นผลเฉลยของสมการ (1.1.1) มาใช้ประโยชน์และต่อมาได้พบว่าจำนวนดังกล่าวสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหาได้จริง จากผลการค้นคิดดังกล่าวจึงเป็นที่มาของการพัฒนาระบบจำนวนจริง (ซึ่งเป็นระบบที่รู้จักกันดีในยุคนั้น) ระบบจำนวนที่ได้จากการพัฒนานี้ก็คือ **ระบบจำนวนเชิงซ้อน**

อาจกล่าวได้ว่าจำนวนซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (1.1.1) เป็นหัวใจหลักในการพัฒนาจำนวนเชิงซ้อน เรานิยมเขียนแทนจำนวนนี้ด้วย i สมมติว่าเราต้องการพัฒนาระบบจำนวนจริงโดยการยอมรับว่าจำนวน i นี้มีอยู่จริง ในกรณีนี้อาจเกิดคำถามขึ้นหลายข้อ เช่น มีโครงสร้างทางพีชคณิต (algebraic structure) ที่ทำให้เกิดการสร้างจำนวนใหม่จากจำนวน i กับจำนวนจริงหรือไม่ และจำนวนใหม่ที่เกิดจากโครงสร้างทางพีชคณิตนี้มีรูปแบบเป็นอย่างไร ประเด็นที่น่าสนใจคือโครงสร้างใหม่ทางพีชคณิตนี้สามารถเข้ากันได้กับโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนจริงเดิมได้หรือไม่ กล่าวคือเราสามารถกำหนดการบวกและการคูณกันระหว่างจำนวนจริงกับจำนวนใหม่ได้โดยที่การบวกและการคูณนี้ยังคงสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริงในระบบจำนวนจริงด้วย

สังเกตว่าถ้ามีโครงสร้างที่เข้ากันได้ดังกล่าวโดยมี i และจำนวนจริงเป็นจำนวนที่ทำให้เกิดจำนวนในระบบดังนั้นภายใต้การดำเนินการทางพีชคณิตของระบบใหม่แล้ว อาจกล่าวได้ว่าจำนวนในระบบนี้ควรมีรูปแบบ

อย่างง่ายเป็น

$$a + ib \tag{1.1.2}$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ เราพบว่าโดยความเป็นจริงแล้วเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกในรูปแบบ (1.1.2) สามารถมีโครงสร้างทางพีชคณิตที่เข้ากันได้กับระบบจำนวนจริงซึ่งเป็นที่มาของระบบจำนวนเชิงซ้อนนั่นเอง เราเรียกจำนวนที่อยู่ในรูป (1.1.2) ว่า **จำนวนเชิงซ้อน** (complex number)

สังเกตว่าเครื่องหมายบวกและคูณใน (1.1.2) ไม่ใช่เครื่องหมายทางพีชคณิตของจำนวนจริง แต่เป็นเครื่องหมายทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งยังไม่ได้มีการกำหนดความหมายที่ชัดเจนไว้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจในเครื่องหมายทางพีชคณิตเหล่านี้และโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนเชิงซ้อน เราจำเป็นจะต้องกำหนดบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนรวมถึงโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนเชิงซ้อนให้เกิดความชัดเจนมากกว่าที่กล่าวมาข้างต้น ในบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนที่จะกล่าวต่อไปนี้เราจะใช้คู่อันดับของจำนวนจริงเป็นเครื่องมือในการอธิบายโครงสร้างทางพีชคณิตของระบบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอาจมีความแตกต่างจากที่กล่าวมาข้างต้น อย่างไรก็ตาม เราจะได้แสดงให้เห็นในภายหลังว่าจำนวนเชิงซ้อนที่อธิบายด้วยคู่อันดับดังกล่าวสามารถอธิบายด้วยรูปแบบ (1.1.2) ได้เช่นกัน นอกจากนี้เราจะได้พบว่าการนิยามจำนวนเชิงซ้อนด้วยคู่อันดับนี้จะช่วยเสริมสร้างมุมมองในเชิงเรขาคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้เป็นอย่างดี

ก่อนที่จะได้กล่าวถึงบทนิยามของระบบจำนวนเชิงซ้อนจะขอกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญของของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นผลจากการสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อนโดยอาศัยสมการ (1.1.1) กล่าวคือในระบบจำนวนเชิงซ้อน สมการพหุนามหรือสมการที่มีรูปทั่วไปเป็น

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

มีผลเฉลยเสมอ เราจะได้กล่าวถึงรายละเอียดต่าง ๆ เหล่านี้ต่อไป

บทนิยาม 1.1.1 ระบบจำนวนเชิงซ้อนหมายถึงเซตของคู่อันดับใน $\mathbb{R}^2$ (ซึ่งต่อไปจะเขียนแทนเซตนี้ด้วย $\mathbb{C}$) ภายใต้การบวกและการคูณดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\(x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

เรียกสมาชิกที่อยู่ใน $\mathbb{C}$ ว่า **จำนวนเชิงซ้อน** (complex number)

ถ้า $z = (x, y)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วเราเรียกจำนวนจริง x และจำนวนจริง y ว่า**ส่วนจริง** (real part) และ**ส่วนจินตภาพ** (imaginary part) ของ z และจะเขียนแทนส่วนจริงของ z และส่วนจินตภาพของ z ด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Re}(z)$ และ $\mathrm{Im}(z)$ ตามลำดับ

หมายเหตุ 1.1.1 1. โดยสมบัติของคู่อันดับจะได้ว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ

$$z_1 = z_2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \text{ และ } \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

2. จากสมบัติการบวกของจำนวนเชิงซ้อนจะได้ว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{และ} \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$$