สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แคลคูลัส ๑
Calculus I

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ณัฏฐนาถ ไตรภพ
ยุวรีย์ พันธ์กล้า

แคลคูลัส ๑
CALCULUS I

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ยุวรีย์ พันธ์กล้า
ณัฏฐนาถ ไตรภพ

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2556

195.-

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
แคลคูลัส ๑ / ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุววีย์ พันธ์กล้า, ณัฏฐนาถ ไตรภพ
1. แคลคูลัส I. ยุววีย์ พันธ์กล้า II. ณัฏฐนาถ ไตรภพ

515

ISBN 978-974-03-3113-1

สพจ. 1751

ธรรมคุณค่าวิชาการ สู่สังคม
www.ChulaPress.com
Knowledge to All

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2556

ผู้จัดจำหน่าย **ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา **ศาลาพระเกี้ยว** โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441
สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495
ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165
ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135
ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239
โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023
จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304
รัตนาธิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405
Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 **http://www.chulabook.com**

เครือข่าย **ศูนย์หนังสือ ม.แม่ฟ้าหลวง จ.เชียงราย** โทร. 0-5391-7020-4 โทรสาร 0-5391-7025
ศูนย์หนังสือ ม.วลัยลักษณ์ จ.นครศรีธรรมราช โทร. 0-7567-3648-51 โทรสาร 0-7567-3652
ร้านหนังสือเสริมทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี) รามคำแหง 43/1 โทร. 0-2538-2573 โทรสาร 0-2539-7091
ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏเชียงราย จ.เชียงราย โทร. 0-5377-6000
ศูนย์หนังสือ ม.อุบลราชธานี จ.อุบลราชธานี โทร. 0-4535-3140, 0-4528-8400-3 ต่อ 1803
โทรสาร 0-4535-3145
ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏสุราษฎร์ธานี จ.สุราษฎร์ธานี โทร. 0-7735-5466, 0-7791-3333 โทรสาร 0-7735-5468
ศูนย์หนังสือโรงเรียนเทคโนโลยีไออาร์พีซี จ.ระยอง โทร. 0-3889-9130-2 ต่อ 331
โทรสาร 0-3889-9130 ต่อ 301
ศูนย์หนังสือ ม.ราชภัฏเทพสตรี จ.ลพบุรี โทร. 0-3642-7485-93

ร้านค้า, หน่วยงานราชการ ติดต่อฝ่ายขายส่ง สาขารัตนาธิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

กองบรรณาธิการ : พิพรรณ โพธะสุต
ออกแบบปก : ขวัญหทัย นามมุงคุณ รูปเล่ม : รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา
พิมพ์ที่ : บริษัทวีพริ้นท์ (1991) จำกัด โทร. 0-2451-3010 โทรสาร 0-2451-3016

คำนำ

ตำรา **แคลคูลัส ๑ (CALCULUS I)** เป็นหนังสือใช้ประกอบการสอนวิชาแคลคูลัส ๑ เนื้อหาภายในเล่ม ประกอบด้วย ลิมิต ความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปร อนุพันธ์และค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงและฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย การอินทิเกรต อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย การประยุกต์ของอนุพันธ์ เทคนิคการอินทิเกรต การประยุกต์ของอินทิกรัล อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

ผู้เรียบเรียงตำรา แคลคูลัส ๑ ประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา รองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ และรองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธ์กล้า ซึ่งมีประสบการณ์การสอน แคลคูลัส และวิชาคณิตศาสตร์อื่น ๆ ให้กับนิสิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นเวลานานกว่า 23 ปี โดยรองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา เป็นบรรณาธิการตำรา

คณะผู้จัดทำตำรา แคลคูลัส ๑ ได้รวบรวมเนื้อหาเพื่อให้ตำราเล่มนี้ สามารถใช้ประกอบการสอนวิชาแคลคูลัส ๑ ให้กับนิสิตคณะต่าง ๆ ที่เรียนวิชา แคลคูลัส ๑ กับภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ เช่น คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี (ภาควิชาสถิติ) คณะครุศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์การกีฬา คณะเภสัชศาสตร์ คณะสหเวชศาสตร์ และนิสิตสาขาอื่น ๆ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส ๑ กับภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เนื่องจากตำราเล่มนี้ได้ใช้ในการสอนมาแล้ว ผู้เขียนจึงได้รับคำแนะนำต่าง ๆ จากทั้งอาจารย์ผู้สอน และนิสิตที่ใช้ตำราเล่มนี้ ในการพิมพ์ครั้งนี้ ผู้เขียนจึงได้ปรับปรุงคำอธิบายเกี่ยวกับบทนิยามและทฤษฎีบทให้เข้าใจง่าย ปรับเปลี่ยนตัวอย่างบางข้อให้นิสิตมีความเข้าใจมากขึ้น และแก้ไขคำผิด เพื่อให้ตำราเล่มนี้มีคุณภาพดียิ่งขึ้น

ผู้เขียนหวังว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับ นิสิต นักศึกษา และผู้สอนทุกท่านและทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาแคลคูลัส

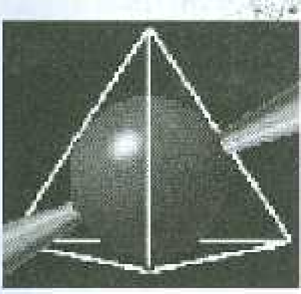
รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ

รองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธ์กล้า

พฤษภาคม 2556

สารบัญ



บทที่ 1
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปร

1.1 ความหมายของลิมิต

การศึกษาเรื่องลิมิตเป็นสิ่งจำเป็นมาก เพราะลิมิตมีความสำคัญมากในทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับวิชาแคลคูลัส ในหัวข้อนี้เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาแนวคิดเรื่องลิมิต แล้วจึงนำไปสู่การให้บทนิยามของลิมิตต่อไป พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย

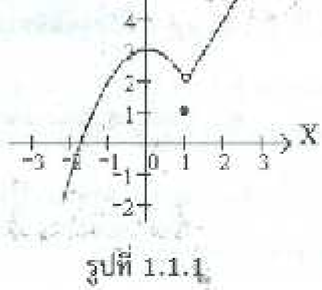
$$f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

เราคำนวณค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่มีค่าเข้าใกล้ 1 ได้ดังตารางต่อไปนี้

x	f(x)
1.1	2.2
1.01	2.02
1.001	2.002
1.0001	2.0002
1.00001	2.00002
1.000001	2.000002

x	f(x)
0.9	2.19
0.99	2.0199
0.999	2.001999
0.9999	2.00019999
0.99999	2.0000199999
0.999999	2.000001999999

เมื่อพิจารณาค่าของ $f(x)$ จากตาราง จะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ไม่ว่าจะเข้าใกล้ในลักษณะที่ $x < 1$ (ซึ่งจะกล่าวว่า x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย) หรือในลักษณะที่ $x > 1$ (ซึ่งจะกล่าวว่า x เข้าใกล้ 1 ทางขวา)
เราจะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็น 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1
และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$
ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ในที่นี้ $f(1) = 1$
แต่เราไม่ได้สนใจค่าของ $f(1)$ เลยว่าจะมีค่าหรือไม่
นอกจากนั้นเราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูปที่ 1.1.1
ซึ่งจะสังเกตจากกราฟของ f ได้เช่นกันว่า
$f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

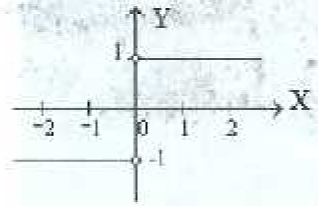


รูปที่ 1.1.1

จากการศึกษาแนวคิดเรื่องลิมิตข้างต้น จะเห็นว่าถ้าลิมิตมีค่า เราสามารถหาค่าของลิมิตโดยพิจารณาจากค่าของฟังก์ชัน ซึ่งอาจจะพิจารณากราฟของฟังก์ชันประกอบด้วยก็ได้ เราจะลองใช้วิธีการนี้พิจารณาหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ ให้ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จะเห็นว่า $f(0)$ ไม่มีค่า

เพราะว่า $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$



รูปที่ 1.1.2

เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูปที่ 1.1.2

จะสังเกตได้ว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย แล้ว $f(x) = -1$

และ ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา แล้ว $f(x) = 1$

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ ไม่ได้เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งที่แน่นอน ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ไม่มีค่า และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ไม่มีค่า

ในการพิจารณาค่าของ $\lim_{x \to a} f(x)$ เราต้องพิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่จุดอื่น ๆ ใน D_f ที่อยู่ใกล้ a แสดงว่า a ต้องเป็นจุดที่มีจุดอื่นใน D_f อยู่ใกล้ ๆ ซึ่งจุดที่มีสมบัติเช่นนี้เราเรียกว่าจุดลิมิต เพราะฉะนั้นในการกล่าวถึงบทนิยามของลิมิต $\lim_{x \to a} f(x)$ จึงจำเป็นต้องรู้ความหมายของ จุดลิมิต ดังนี้

บทนิยาม 1.1.1 ให้ $E \subseteq R$ และ $a \in R$ เราจะกล่าวว่า a เป็น จุดลิมิต (limit point) ของ E ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก δ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า $((a - \delta, a + \delta) - \{a\}) \cap E \neq \varnothing$

ตัวอย่างเช่น 1. ให้ $E_1 = [1, 2]$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน E_1 เป็นจุดลิมิตของ E_1

2. ให้ $E_2 = (1, 2)$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน E_2 เป็นจุดลิมิตของ E_2 รวมทั้ง 1 และ 2 ก็เป็นจุดลิมิตของ E_2

3. ให้ $E_3 = (1, 2) \cup \{3\}$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน $[1, 2]$ เป็นจุดลิมิตของ E_3 แต่ 3 ไม่เป็นจุดลิมิตของ E_3 เพราะว่า มี $\delta = 0.5$ ซึ่ง $((3 - \delta, 3 + \delta) - \{3\}) \cap E_3 = ((2.5, 3.5) - \{3\}) \cap E_3 = \varnothing$

4. ให้ $E_4 = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า E_4 ไม่มีจุดลิมิตเลย

5. ให้ $E_5 = R$ จะได้ว่าจุดทุกจุดใน E_5 เป็นจุดลิมิตของ E_5

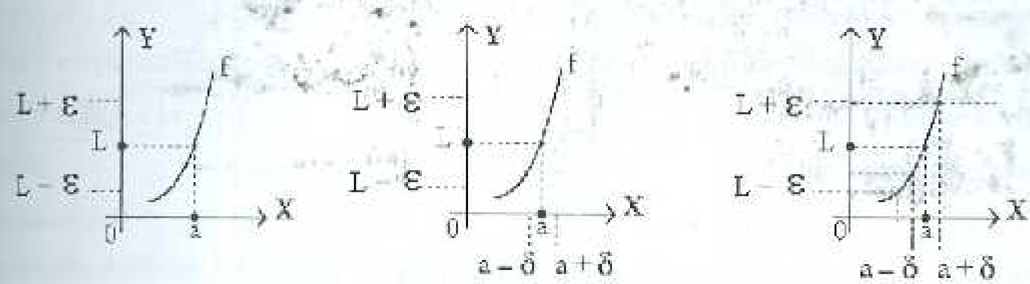
ข้อสังเกต

1. จุดลิมิตของเซตใดก็คือจุดที่มีจุดอื่นในเซตนั้นอยู่ใกล้ ๆ นั่นเอง ซึ่งอาจจะอยู่ใกล้ ๆ ทั้งสองด้าน หรือด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียวก็ได้ เช่น 1.5 เป็นจุดลิมิตของ $(1, 2)$ โดยมีจุดอื่นใน $(1, 2)$ อยู่ใกล้ ๆ 1.5 ทั้งสองด้าน แต่ 1 เป็นจุดลิมิตของ $(1, 2)$ โดยมีจุดอื่นใน $(1, 2)$ อยู่ใกล้ ๆ 1 ทางด้านขวาเท่านั้น

2. จุดลิมิตของเซตใดอาจจะอยู่หรือไม่อยู่ในเซตนั้นก็ได้ เช่น 1.5 เป็นจุดลิมิตของ $(1, 2)$ โดยที่ $1.5 \in (1, 2)$ แต่ 1 เป็นจุดลิมิตของ $(1, 2)$ โดยที่ $1 \notin (1, 2)$

บทนิยาม 1.1.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิต (limit) เป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

เราอาจพิจารณาความหมายของ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ได้จากรูปที่ 1.1.3



รูปที่ 1.1.3

สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε เราสามารถหาจำนวนจริงบวก δ ได้ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$

ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

ทฤษฎีบท 1.1.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **มีค่า แล้ว** ค่าของลิมิตมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

เพราะฉะนั้น ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $L_1 \neq L_2$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ จะได้ว่า มี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L_1| < \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \text{ ทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta_1$$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ จะได้ว่า มี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L_2| < \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \text{ ทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta_2$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ D ดังนั้นจะมี $x \in ((a - \delta, a + \delta) - \{a\}) \cap D$

ซึ่งจะได้ว่า
$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{1}{2}|L_1 - L_2| + \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \\ &= |L_1 - L_2| \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $L_1 = L_2$ □

ตัวอย่าง 1.1.1 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -1} (4x - 9) = 5$

แนวคิด เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$

ที่ทำให้ $|(4x + 9) - 5| < \varepsilon$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x + 1| < \delta$

จะเห็นว่าจุดสำคัญของการแสดงข้อความนี้อยู่ที่การเลือก δ ที่เหมาะสม ซึ่งสามารถทำได้

โดยพิจารณาจาก $|(4x+9)-5|$ ดังนี้

$$|(4x+9)-5| = |4x+4| = 4|x+1| < 4\delta$$

เพราะฉะนั้น เราควรเลือก δ ที่ทำให้ $4\delta \le \varepsilon$ หรือ $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ เพราะฉะนั้น $\delta > 0$

ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x+1| < \delta$

จะได้ว่า $|(4x+9)-5| = |4x+4| = 4|x+1| < 4\delta = (4)(\frac{\varepsilon}{4}) = \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $|(4x+9)-5| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ที่ทำให้ $|(4x+9)-5| < \varepsilon$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x+1| < \delta$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to -1} (4x+9) = 5$ □

ตัวอย่าง 1.1.2 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

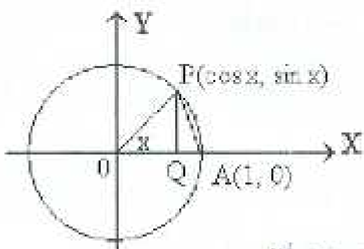
แนวคิด เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|\sin x - 0| < \varepsilon$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x-0| < \delta$

วิธีทำ ในการเลือก δ เราจำเป็นต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่าง $|\sin x|$ และ $|x|$

พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

กรณีที่ 1. $0 < x < \frac{\pi}{2}$



รูปที่ 1.1.4

จากรูปที่ 1.1.4 พิกัดของจุด P คือ $(\cos x, \sin x)$

ลากเส้นตรงจากจุด P มาตั้งฉากกับแกน X ที่จุด Q

จะได้ว่า $|\sin x| = \sin x = PQ \le PA \le$ ความยาวของส่วนโค้ง $PA = x = |x|$

เพราะฉะนั้น $|\sin x| \le |x|$ หรือ $\sin x \le x$ ทุก $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

กรณีที่ 2. $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ จะได้ว่า $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin(-x) \le -x$

ซึ่งจะได้ว่า $-\sin x \le -x$

เพราะฉะนั้น $|\sin x| = -\sin x \le -x = |x|$

เพราะฉะนั้นจากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า $|\sin x| \le |x|$ ทุก $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$